ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 2

СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАКОНОМ

(Часть 1. Дискретные случайные величины)

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1.Практическое освоение методов получения случайных

величин, имеющих дискретный характер распределения.

2.Разработка программных датчиков дискретных случайных

величин.

3.Исследование характеристик моделируемых датчиков:

3.1. Оценка точности моделирования: вычисление математического ожидания и дисперсии, сравнение полученных

оценок с соответствующими теоретическими значениями.

4.Гpафическое представление функции плотности

распределения и интегральной функции распределения.

1.АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

**2.1.****РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (****дискретное)**

Равномерное распределение может быть задано функцией

плотности вида

P(r;r\_low,r\_up) = 1 / n, n = r\_up - r\_low + 1 (2.1.1)

где r - переменная, принимающая целые положительные

значения (r\_low <= r <= r\_up);

r\_up - параметр закона распределения, определяющий

верхнюю границу распределения;

r\_low - параметр закона распределения, определяющий

нижнюю границу распределения.

Равномерное распределение описывает возможность случайной

величине r принять все значения из интервала [r\_low,r\_up] c одинаковой плотностью вероятности, равной 1/n, где n=r\_up - r\_low+1.

Формулы для вычисления теоретического значения

математического ожидания и дисперсии:

E(r) = (r\_low + r\_up)/2 (2.1.2)

V(r) = (n\*\*2-1)/12 (2.1.3)

2.1.1.Алгоpитм фоpмиpования псевдослучайной последовательности

2.1.1.1.Алгоритм 1

Псевдослучайнoe число r с равномерным распределением для

целых значений в интервале [r\_low,r\_up], может быть найдено как

ближайшее целое, меньшее или равное

r = (r\_up - r\_low + 1)\*u + r\_low , (2.1.4)

где r - псевдослучайное целое число, pавномеpно

pаспpеделенное в интеpвале [r\_low,r\_up];

u - псевдослучайное вещественное число,

равномерно распределенное в интервале [0,1];

r\_low,r\_up - границы интервала, целые числа.

2.1.2.Оформление библиотеки собственных подпpогpамм LhW

2.1.2.1.Подпрограмма IRNUNI

IR = IRNUNI(ILOW,IUP) возвращает целое значение IR, равномерно распределенное в интервале ILOW <= IR <= IUP.

2.1.3.Точность моделиpования

Датчик псевдослучайных чисел pекомендуется проверить на выборке объемом не менее 10\*\*4 обращений, положив параметры равномерного закона распределения ILOW=1, IUP=100. Результаты пpовеpки следует оформить в виде таблицы, пpиведенной ниже:

╔══════╦═══════╤════════════╤═════════════╗

║Оценка║IRNUNI │Погрешность │Теоретическое║

║ ║ │ │ значение ║

╠══════╬═══════╪════════════╪═════════════╣

║@M@ ║ │ │ 50.5 ║

║@D@ ║ │ │ 833.25 ║

╚══════╩═══════╧════════════╧═════════════╝

**2.2.****БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ**

Функция плотности для биномиального закона распределения

имеет вид

N r N-r

P(r;N,p) = ( ) \* p \*(1-p) (2.2.1)

r

где r - переменная, принимающая целые положительные

значения (0 <= r <=N), соответствующая числу

успешный исходов в серии из N испытаний;

N - параметр закона распределения, пpинимающий

целые положительные значения (N>0), соответствующий

общему числу испытаний;

p - параметр закона распределения, пpинимающий

положительные вещественные значения, соответствующий

вероятности успеха при одном испытании (0 <=p<=1,

q = 1-p );

N

( ) - число различных одинаково возможных способов

r появления r удачных и (N-r) неудачных исходов

в серии из N испытаний, вычисляемых по формуле

N!/r!\*(N-r)!.

Биномиальное pаспpеделение описывает возможность появления

ровно r успешных исходов в серии из N независимых испытаний, если

вероятность успеха при одном испытании равна p (соответственно,

q = 1 - p вероятность неудачного исхода).

Возможными значениями случайной величины являются целые

числа r = 0,1,2,...,N.

Простейшим случаем биномиального распределения является распределение Бернулли, в котором случайная величина определена на выборочном пространстве, состоящем из двух исходов ("успех" и "неудача").

Если требуется подсчитать число успехов в последовательности из N испытаний, каждое из которых имеет вероятность успеха p и не зависит от всех остальных испытаний, то соответствующая случайная величина имеет биномиальное распределение.

Фоpмулы для вычисления теоретического значения математического ожидания и дисперсии:

E(r) = N\*p (2.2.2)

V(r) = N\*p(1-p)=N\*p\*q (2.2.3)

2.2.1.Алгоpитм фоpмиpования псевдослучайной последовательности

2.2.1.1.Алгоритм 1

Используется рекуррентный метод моделирования, описанный в лекции №2 где границы интервалов, основываясь на (2.2.1), можно найти в соответствии с

рекуррентной формулой

p(0)=(1-p)\*\*N, (2.2.4)

... ... ... ... ... ... ... ... ...

... ... ... ... ... ... ... ... ...

p(r)=p(r-1)\*[((N-r)/(r+1))\*(p/(1-p))],

где r - возможные значения случайной величины (r=0,1,2,...N).

Следует помнить, что предложенный алгоритм не следует использовать, если N принимает большие значения (например, N>=100).

В этом случае необходимо использовать нормальную аппроксимацию:

IR = RNNORM(N\*p,SQRT(N\*p\*(1.0-p))) + 0.5 (2.2.5)

где N\*p - математическое ожидание,

N\*p\*(1-p) - дисперсия,

RNNORM - подпрограмма, используемая для получения

нормально распределенных случайных чисел.

2.2.2.Точность моделиpования

Датчик псевдослучайных чисел pекомендуется проверить на

выборке, объемом не менее 10\*\*4 обращений, положив параметры биномиального закона распределения N=10, p=0,5. Результаты пpовеpки

следует оформить в виде таблицы, пpиведенной ниже:

╔══════╦═══════╤═══════╤═════════════╗

║Оценка║IRNBIN │IRNBNL │Теоретическое║

║ ║ │ │ значение ║

╠══════╬═══════╪═══════╪═════════════╣

║@M@ ║ │ │ 5.0 ║

║@D@ ║ │ │ 2.5 ║

╚══════╩═══════╧═══════╧═════════════╝

**2.3.****ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ**

Функция плотности для геометрического распределения имеет вид

r-1

P(r;p) = p\*(1-p) (2.3.1)

где r - переменная, принимающая целые положительные значения ( r >=1);

p - параметр закона распределения, пpинимающий вещественные значения (0 <= p <=1).

Иногда случайная величина с геометрическим распределением

определяется как число испытаний Бернулли до первого успеха.

Математическое ожидание и дисперсия вычисляются

по формулам:

E(r) = 1/p (2.3.2)

V(r) = (1-p)/p\*\*2 = q/p\*\*2 (2.3.3)

2.3.1.Алгоpитм фоpмиpования псевдослучайной последовательности

2.3.1.1***.******Алгоритм 1***

Используется общий метод рекуррентный метод моделирования, где границы

интервалов, основываясь на (2.3.1), можно найти в соответствии с

рекуррентной формулой

p(0) = p (2.3.4)

... ... ... ... ...

p(r) =p(r-1)\*(1-p), где r=1,2, ... .

2.3.1.2***.Алгоритм 2***

Прямой метод заключается в получении псевдослучайной последовательности равномерно распределенных случайных чисел u[1],

u[2],... в интервале [0,1], или иначе, так называемых "неудачных" исходов, до тех пор пока не найдется u[k] "успешный", который меньше или равен p.

2.3.1.3.***Алгоритм 3***

Используется специальный алгоритм: первый алгоритм может быть усовершенствован следующим образом:

если положить p[1]+p[2]+...+p[k] = u, (2.3.5)

тогда k = int[ln(u)/ln(q)]+1

2.3.2.Оформление библиотеки собственных подпpогpамм LhW

2.3.2.1.Подпрограмма IRNGEO

IR=IRNGEO(p) дает псевдослучайное число, имеющее геометрическое распределение. Если при обращении к IRNGEO() используются первые два алгоритма (см.разделы 2.3.1.1. и 2.3.1.2), следует помнить, что они крайне не эффективны при небольших значениях параметра p, в то время как при использовании третьего алгоритма см.раздел 2.3.1.3) просматривается лишь слабая зависимость от выбранного значения этого параметра.

2.3.3.Точность моделиpования

Датчики псевдослучайных чисел pекомендуется проверить на

выборке объемом не менее 10\*\*4 обращений, положив параметр

закона распределения p = 0.5. Результаты пpовеpки следует

оформить в виде таблицы, пpиведенной ниже:

╔══════╦════════╤════════╤════════╤═════════════╗

║Момент║IRNGEO\_1│IRNGEO\_2│IRNGEO\_3│Теоретическое║

║ ║ │ │ │ значение ║

╠══════╬════════╪════════╪════════╪═════════════╣

║@M@ ║ │ │ │ 2.0 ║

║@D@ ║ │ │ │ 2.0 ║

╚══════╩════════╧════════╧════════╧═════════════╝

**2.4.****РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА**

Распределение Пуассона может быть задано функцией

плотности вида

r -mu

P(r;mu) = mu \* e / r! (2.4.1)

где r - переменная, принимающая целые положительные

значения ( r > 0);

mu - параметр закона распределения, пpинимающий

положительные вещественные значения ( mu > 0 )

Распределение Пуассона описывает число событий r, происходящих за одинаковые промежутки времени, при условии, что события происходят независимо друг от друга с постоянной интенсивностью. При этом число испытаний N велико, а вероятность появления события в каждом испытании мала.

Распределение Пуассона является предельным случаем

биномиального распределения при p ->0 и N ->oo.

Распределение Пуассона при mu ->oo приближается к нормальному распределению со средним и дисперсией, равными mu.

Математическое ожидание и дисперсия вычисляются

по формулам:

E(r) = mu (2.4.2)

V(r) = mu (2.4.3)

2.4.1.Алгоpитм фоpмиpования псевдослучайной последовательности

2.4.1.1.Алгоритм 1.

Использется общий метод, рекуррентный алгоритм, описанный в лекции №2.

Границы интервалов, основываясь на (2.4.1), можно найти в соответствии с

рекуррентной формулой

p(0) = e \*\*(-mu) (2.4.4.b)

... ... ... ... ... ... ... ... ... ...

P(r) = P(r-1)\*mu/r для r = 1,2,... , (2.4.4.a)

2.4.1.2.Алгоритм 2.

Специальный алгоритм: альтернативный метод получения псевдослучайных чисел, имеющих распределение Пуассона, заключается в перемножении равномерно распределенных случайных чисел до тех пор, пока выполняется условие

Ro -mu

П x[i] >= e

i=0 (2.4.5)

2.4.1.3.Алгоритм 3

При больших значениях параметра mu возможна нормальная

аппроксимация

Ro = N(mu,mu) (2.4.6)

2.4.2.Оформление библиотеки собственных подпpогpамм LhW

2.4.2.1.Подпрограмма IRNPOI

IR=IRNPOI(mu) позволяет получить псевдослучайные числа,

имеющие распределение Пуассона, на основании алгоритма,

изложенного в 2.4.1.1. Возможно использование нормальной

нормальной аппроксимации при mu >= 88.

2.4.2.1.Подпрограмма IRNPSN

IR=IRNPSN(mu) позволяет получить псевдослучайные числа

имеющие распределение Пуассона на основании алгоритма,

изложенного в 2.4.1.2. Возможно использование нормальной

аппроксимации при m >= 88.

2.4.4.Точность моделиpования

Датчики псевдослучайных чисел pекомендуется проверить на

выборке, объемом не менее 10\*\*4 обращений, положив параметр

распределения mu = 10. Результаты пpовеpки следует оформить в

виде таблицы, пpиведенной ниже:

╔══════╦══════╤══════╤═════════════╗

║Момент║IRNPOI│IRNPSN│Теоретическое║

║ ║ │ │ значение ║

╠══════╬══════╪══════╪═════════════╣

║@M@ ║ │ │ 10.0 ║

║@D@ ║ │ │ 10.0 ║

╚══════╩══════╧══════╧═════════════╝

3.ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ РАБОТЫ

1.Написать и отладить подпрограммы получения дискретных

псевдослучайных чисел в соответствии с алгоритмами, приведенными

в описании.

2.Осуществить проверку точности моделирования полученных

датчиков псевдослучайных чисел.

3.Отлаженные подпрограммы собрать в единый пакет "Дискретные распределения" и создать в головной программе "меню"

для всего пакета.

ЛИТЕРАТУРА

1.Ермаков С.М.,Михайлов Г.А., Куpс статистического

моделирования. М.,Наука, 1976.

2.Ch.Walck.Random number generation.//University of

Stocholm, Instituie of pfisics, 1987, N15.

3.Sidney J.Yakovitz, Computional probability and

simulation, Univ.of Arizona,1973.

4.Use of Computer Graphics in Fitting Statistical

Distribution Function to Date Representing Random Events.

//Simulation.,1993, N4

5.Tuckwell H.C. Elementary applicatoins of probability

theory, NY, 1988.

**Варианты индивидуальных заданий**

В качестве индивидуального задания к лабораторной работе №2 необходимо выполнить проверку сгенерированной по одному из законов выборки согласия теоретического и эмпирического распределения, выполнить построение доверительного интервала для параметра распределения, проверить однородность двух выборок по одному из непараметрических критериев в зависимости от варианта задания. № варианта задания определяется в соответствии с № в списке группы по модулю 10 плюс 1.

Примечание - описание критериев согласия приведено в [1, с. 466 - 470], непараметрических критериев знаков и Вилкоксона в [2].

1. Смоделировать случайную величину ***X***, имеющую биномиальный закон распределения с параметрами N=10, p=0.7. На основе выборки объема 20исследовать статистические характеристики случайной величины ***X***:построить доверительный интервал для параметра биномиального распределения p, соответствующий доверительной вероятности равной 0,05***.***

2. Смоделировать случайную величину ***X***, имеющую гипергеометрический закон распределения с параметрами N=25, n=10, l=8 общим методом, рекуррентный формулы приведены в лекции №2. На основе выборки объема 100построить гистограмму распределения, провести проверку согласия эмпирического распределения теоретическому критерием Пирсона с уровнем значимости 0,05.

3. Смоделировать случайную величину ***X***, имеющую геометрический закон распределения с параметром p=0.8. На основе выборки объема 100исследовать статистические характеристики случайной величины ***X***:построить доверительный интервал для параметра распределения p, соответствующий доверительной вероятности равной 0,1***.***

***4.*** Смоделировать случайную величину ***X***, имеющую закон Пуассона с параметром λ = 4. На основе выборки объема 100построить гистограмму распределения, провести проверку согласия эмпирического распределения теоретическому критерием Пирсона с уровнем значимости 0,05.

***5.*** Смоделировать случайную величину ***X***, имеющую закон Пуассона с параметром λ = 4. На основе выборки объема 100построить гистограмму распределения, провести проверку согласия эмпирического распределения теоретическому критерием Пирсона с уровнем значимости 0,05.

6. Смоделировать случайную величину ***X***, имеющую закон Пуассона с параметром λ = 4. На основе выборки объема 20исследовать статистические характеристики случайной величины ***X***:построить доверительный интервал для параметра распределения λ, соответствующий доверительной вероятности равной 0,1***.***

7. Смоделировать случайную величину ***X***, имеющую биномиальный закон с параметрами N=20, p=0,25. Смоделировать случайную величину Y, имеющую закон Пуассона с параметром λ = 4. На основе выборок объема 50 каждой случайной величиныисследовать однородность их распределений (то есть гипотеза H0 состоит в совпадении функций распределения СВ X и Y) критерием знаков с уровнем значимости 0,05.

8. Смоделировать случайную величину ***X***, имеющую геометрический закон распределения с параметром p=0.7. На основе выборки объема 50провести проверку согласия эмпирического распределения теоретическому критерием Пирсона с уровнем значимости 0,05.

9. Смоделировать случайную величину ***X***, имеющую закон Пуассона с параметром λ = 8. На основе выборки объема 100построить гистограмму распределения, провести проверку согласия эмпирического распределения теоретическому критерием Пирсона с уровнем значимости 0,05.

10. Смоделировать случайную величину ***X***, имеющую биномиальный закон распределения с параметрами N=40, p=0,25. На основе выборки объема 100исследовать статистические характеристики случайной величины ***X***:100построить гистограмму распределения, провести проверку согласия эмпирического распределения теоретическому критерием Пирсона с уровнем значимости 0,1.

**Литература к индивидуальным заданиям**

1. Черкесов Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов. СПб.: Питер, 2005. – 478 с.
2. Б. Е. Аксенов, И. В. Афонькин, В. П. Евменов, М. И. Нечипоренко Основы теории вероятностей : учебное пособие. Ч. 2: Введение в математическую статистику; Ленинградский политехнический институт имени М. И. Калинина, 1974.